<u>**Un cavalier sur l'échiquier**</u>

Année 2022-2023

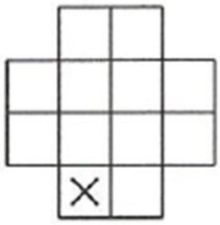
Noah Chassigneux, Othello Decoene-Moura, Ousswa Ghairi, Ghillas Hakkoum, Hugo Lathida, Ali Haji Mohammad, Gwendoline Morice, Victoria Sanchez et Louann Vallet (classe de cinquième)

Établissement : Collège Ernest Renan - Saint-Herblain (44)

Enseignants : Maxime Droguet et Pierre de Guido

1 Présentation du sujet

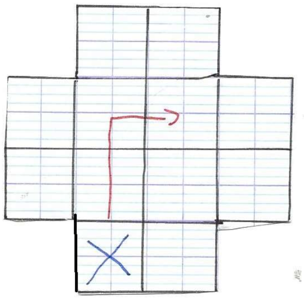
Un cavalier se déplace sur un échiquier toujours de la même manière : deux cases dans une direction, puis une case dans une direction perpendiculaire à la première.



Supposons que notre échiquier ait la forme suivante ci-dessus et que le cavalier commence sur la case cochée.
- Le cavalier peut-il passer exactement une fois par case ?
- Et si le cavalier commence sur une autre case ?
- Et si l'échiquier est carré ? (Essayez avec 1×1, 2×2, etc.)
- Et avec d'autres formes sortant de votre imagination ?

2 Introduction

Actuellement en classe de 5em au collège Ernest Renan, nous travaillons depuis le début de l'année sur le problème le Cavalier sur l'échiquier.



Dans le problème de base, le cavalier part de la croix bleue (schéma ci-dessus) et peut faire le trajet de la flèche rouge ou un autre trajet tant qu'il respecte la règle de déplacement d'un cavalier dans le jeu d'échecs : il se déplace toujours de la même façon, en L, c'est-à-dire de deux cases en longueur et une case en largeur.

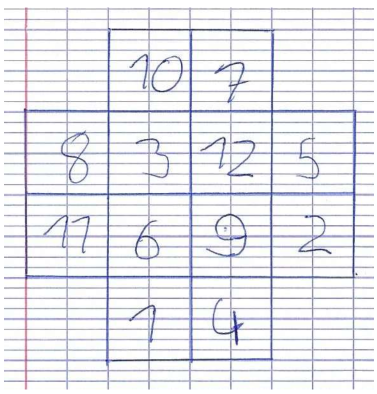
3 Résolution de la figure de base : le 4×4 sans les coins

La démarche que nous avons suivie pour trouver le résultat de la première figure le 4x4 sans les coins (qui est la figure initiale du problème) a été la suivante.

Notre première idée était de trouver la réponse grâce à un algorithme assez simple: case intérieure - case extérieure - case intérieure - case extérieure-… On appelle cases intérieures les 4 cases du centre de l'échiquier. Les autres étant nommées cases extérieures.

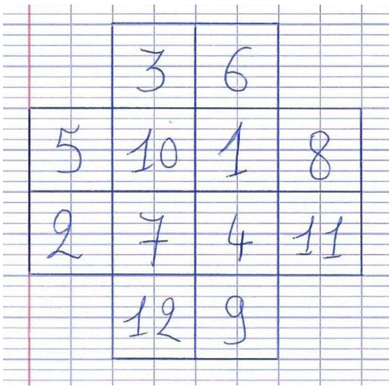
Cela n'a pas fonctionné car il y a deux fois plus de cases extérieures que de cases intérieures.

En comprenant cela nous avons pensé a un deuxième algorithme: case extérieure – case extérieure – case intérieure – case extérieure – case extérieure – case intérieure-…
Grâce à ce deuxième algorithme et après avoir fait de nombreux essais, nous avons trouvé la solution (schéma ci-dessous).



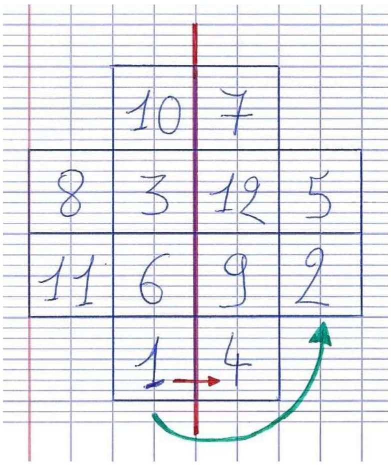
1ère solution trouvée :
En partant de l'extérieur (case n°1) pour finir à l'intérieur (case n°12).

Comme nous commencions à l’extérieur et finissions à l’intérieur, nous avions automatiquement une deuxième solution avec un départ depuis l’intérieur et un l’ordre des cases inversé. On finit dans ce cas à l’extérieur.



<u>2ème solution trouvée :</u>
En partant de l’intérieur (case n°1) pour finir à l’extérieur (case n°12).

En partant de ces deux résultats, nous avons utilisé la symétrie axiale et la rotation pour montrer que toutes les cases de cet échiquier peuvent être le départ d’une solution.



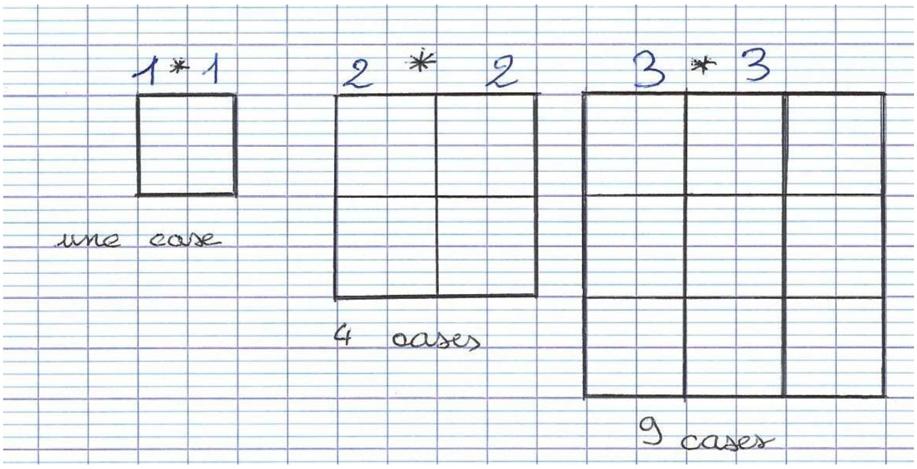
Grâce à la rotation, nous montrons que si la case 1 est le point de départ d’une solution possible, alors les cases 2, 7 et 8 aussi.

Grâce à la symétrie axiale, nous montrons que si la case 1 est le point de départ d’une solution possible, alors la case 4 aussi et donc les cases 5, 10 et 11 aussi par rotation.

Avec le même raisonnement, nous montrons que toutes les cases intérieures sont des points de départ de solutions possibles.

4 Résolution des carrés 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 et 5×5

Nous nous sommes ensuite penchés sur des carrés complets (c'est-à-dire avec les coins) de différentes tailles.



Pour le 1×1 :
C'est un cas très simple : le cavalier commence sur la seule et unique case, c'est donc possible de le résoudre.

Pour le 2×2 :
Le cavalier ne peut pas se déplacer et donc c'est impossible.

Pour le 3×3 :
C'est impossible car si on part de l'extérieur, on ne peut pas aller au centre donc on ne peut se déplacer sur toutes les cases. Et si on part du centre, on ne pas en partir.

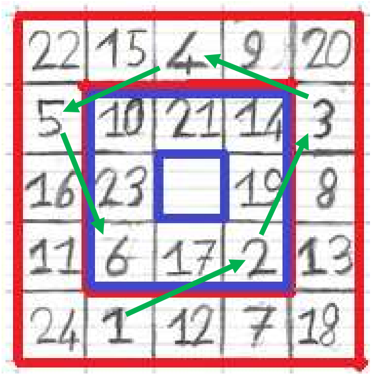
Pour le 4×4 :
Nous arrivons maintenant au 4×4. C'est un cas particulier car malgré de longues recherches nous n'avons pas trouvé la solution.

	1		13
	10	7	4
2	5	12	9
11	8	3	6

1	8	15	10
14	11	4	7
5	2	9	12
	13	6	3

Nous pensons que le 4×4 n’est pas possible, mais nous n’avons pas réussi à le prouver.

<u>Pour le 5×5 :</u>
Pour résoudre le problème dans le cas de ce carré, nous avons suivi le raisonnement suivant :
- pour commencer, nous avons essayé de faire le tour des côtés avec un algorithme case extérieure/ case intérieure/ case extérieure/ case



extérieure/case intérieure/ case extérieure…

- ensuite nous avons remarqué que le centre était la seule case libre et qu'il suffisait de commencer par cette case et d'aller a la case n°1 de l'ancien essai.

Nous avons alors trouvé la solution ci-dessous :

23	16	5	10	21
6	11	22	15	4
17	24	1	20	9
12	7	18	3	14
25	2	13	8	19

5 Réflexion sur les rectangles

Nous avons aussi travaillé sur des rectangles. Pour cela nous avons utilisé la même technique que pour les carrés : nous choisisons unrectangle au hasard puis, nous cherchons une solution jusqu'à la trouver ou que la figure nous paraisse impossible. Alors, nous prenons un nouveau rectangle.

	27	6	19	12	25	4
7	20	13	26	5	18	11
14	1	22	9	16	3	24
21	8	15	2	23	10	17

27	10	25	20	35	8	33	18	39	6	43
24	21	28	9	30	19	36	7	42	17	40
11	26	1	22	13	34	3	32	15	38	5
	23	12	29	2	31	14	37	4	41	16

Pour certains des rectangles, nous avons utilisé une technique au lieu de chercher au hasard.
Cette technique consiste à remplir la partie extérieure du rectangle, puis l'intérieur en rectangles « concentriques » comme ici sur le 8x9.

		10				12		
9				11				
							1	
	8							
								2
7								
			5				3	
	6				4			

22		10		24		12		
9		23		11		25		13
	21						1	
	8						14	
20								2
7								15
	19		5		17		3	
	6		18		4		16	

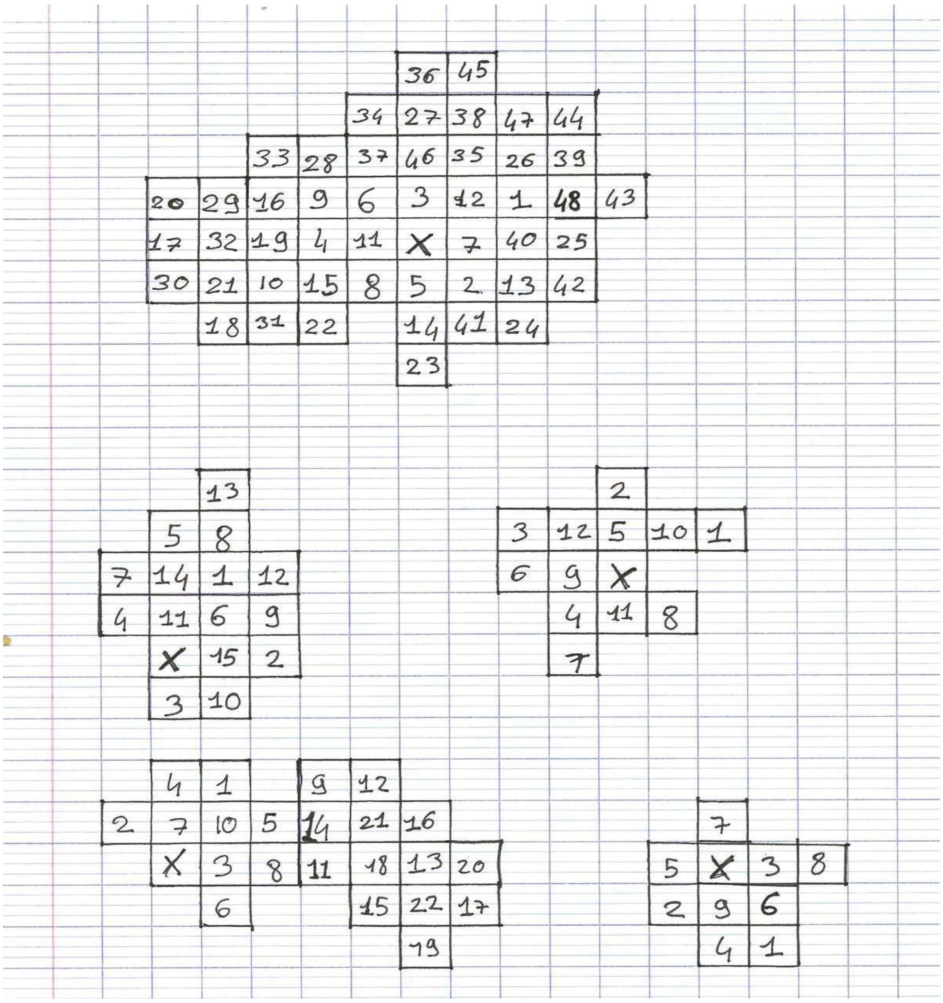
22	35	10	49	24	37	12	51	
9	48	23	36	11	50	25	38	13
34	21						1	26
47	8						14	39
20	33						27	2
7	46						40	15
32	19	44	5	30	17	42	3	28
45	6	31	18	43	4	29	16	41

22	35	10	49	24	37	12	51	
9	48	23	36	11	50	25	38	13
34	21	60	65	56	71	52	1	26
47	8	55	70	61	66	57	14	39
20	33	64	59	68	53	62	27	2
7	46	69	54	63	58	67	40	15
32	19	44	5	30	17	42	3	28
45	6	31	18	43	4	29	16	41

Nous obtenons alors un rectangle plus petit et donc, plus facile à remplir.
Pour l'instant, le 8x9 est le seul sur lequel nous ayons utilisé cette technique et nous aimerions savoir si elle marche avec tous les rectangles et si non, avec lesquels elle fonctionne.

6 D’autres formes

Nous avons aussi trouvé des formes plus inhabituelles.



Pour cela, nous avons utilisé une technique différente : au lieu de chercher dans une forme déjà choisie, nous rajoutons des cases quand nous en avons besoin.
Nos résultats allaient de 10 à 43 cases, mais comme cette procédure ne correspondait pas à notre travail, nous l'avons abandonnée.

6 Conclusion

Nous aurions pu continuer à chercher sur des carrés, des rectangles et d'autres formes de tailles différentes, mais ça n'aurait pas eu beaucoup d'intérêt. Pendant 6 mois nous avons cherché et travaillé sur plusieurs sortes de figures pour pouvoir en arriver là.

Si nous pouvions continuer ce travail de recherche, nous aimerions essayer de prouver que le carré 4×4 est impossible. Nous aimerions aussi continuer le travail sur les rectangles pour voir si notre méthode marche avec d'autres rectangles.

Au début, nous étions 2 groupes différents à travailler sur le même sujet, *le cavalier sur un échiquier* et nous avons réuni les 2 groupes pour comparer nos découvertes et rédiger cet article

Ce sujet n'était finalement pas si simple.