

La confiture pommes-poires

Année 2022-2023

Léo Bernard (4^e), Houlette Banzuemi Bavinga (5^e), Jacqui Bindickou (5^e), Héline Cétinkaya (3^e), Timothée Jeanneau (3^e), Noam Peltier--Bazin (4^e) et Kayliah Remy (5^e)

Établissement : Collège Ernest Renan - Saint-Herblain (44)

Enseignants : Pierre de Guido et Maxime Droguet

Énoncé du problème :

L'envie vous prend de faire de la confiture pomme poire, pour cela il vous faut exactement 1 poire et 2 pommes.

Or le magasin ne vend que des lots de 1 pomme - 1 poire.

De plus, vous savez qu'en sortant du magasin, une pie viendra voler vos pommes 3 par 3, et un corbeau viendra voler les poires 5 par 5.

Donc, pour résumer :

→ Nous devons donc faire de la confiture pomme poire avec précisément 1 poire et 2 pommes.

→ Pour cela, nous achetons **des lots constitués de 1 pomme et 1 poire.**

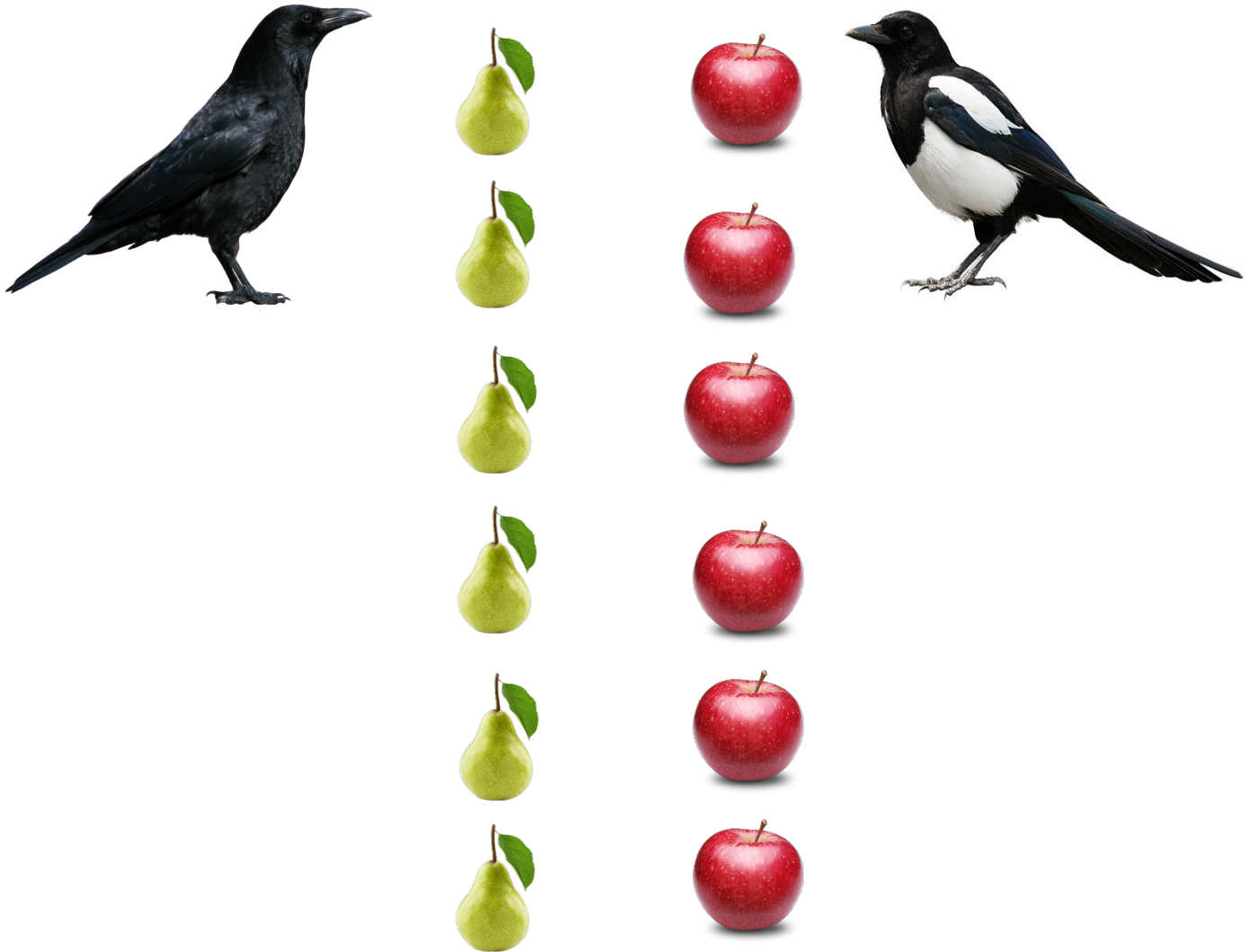
→ Malheureusement, deux oiseaux (une pie et un corbeau) volent les poires et les pommes achetées, toujours de la même manière :

- **La pie vole les pommes 3 par 3.**
- **Le corbeau vole les pommes 5 par 5 .**

La question est donc :

Combien de lots pomme- poire devons-nous acheter pour faire la confiture demandée ?

1) Introduction



Là, on a un exemple avec 6 pommes et 6 poires .

Lors du premier passage :

→ la pie prend 3 pommes.

→ le corbeau prend 5 poires.

Il reste donc 3 pommes et 1 poire.

Au deuxième passage :

→ la pie repasse prendre le reste des pommes, donc 3.

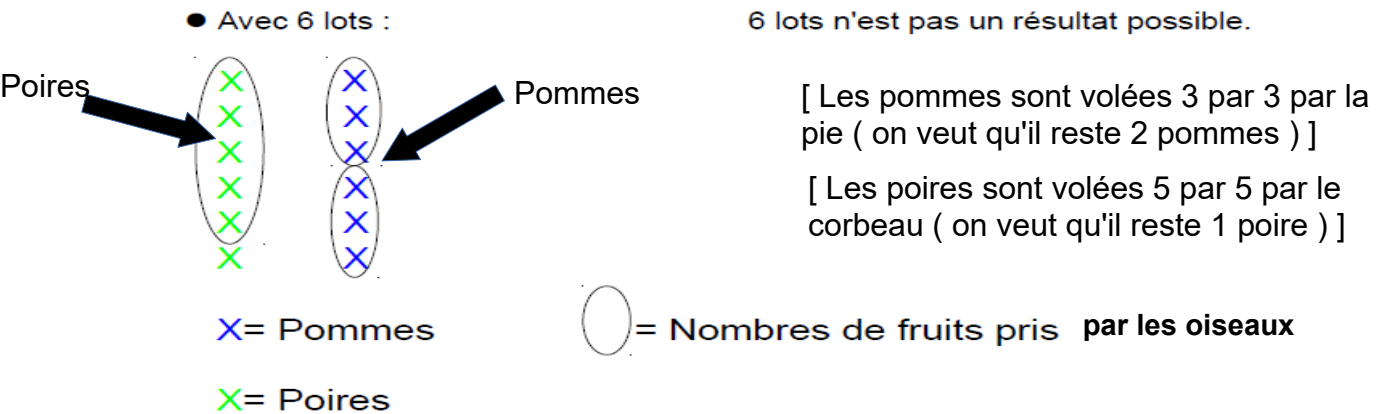
→ mais le corbeau ne peut pas prendre les poires car il en reste une donc moins que ce qu'il doit prendre .



2) Premières recherches

On a reformulé l'exemple avec un système de croix de couleur.

EXEMPLE

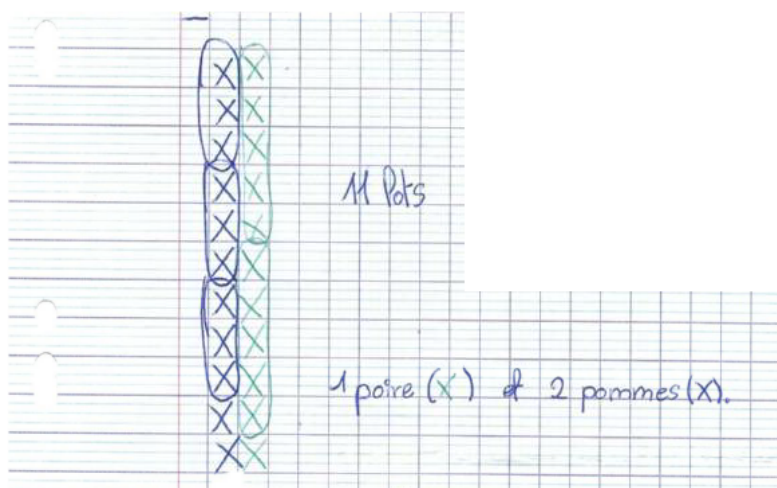


Les croix bleues représentent les pommes, les croix vertes représentent les poires et les ovales noirs représentent le nombres de fruits pris par les oiseaux. Les croix qui ne sont pas entourées sont les fruits restants.

Après quelques recherches on a trouvé que :

- Si les nombres de fruits restants que l'on veut sont plus grands ou égaux aux nombres de fruits volés par les oiseaux à chaque passage, ce ne sera pas possible. Au contraire, si le nombre que l'on veut est plus petit que le nombre que l'oiseau prend, alors cela sera possible.

Après avoir remarqué cela, on a trouvé un premier résultat qui répond au problème :



En achetant 11 lots, il reste 1 poire et 2 pommes après le passage des oiseaux .

Pour vérifier cela on a fait le calcul : $3 \times 3 + 2 = 11$ $5 \times 2 + 1 = 11$

Ensuite on a répondu à la seconde question qui était :

Si on changeait le nombre de fruits qu'il nous faudra à la fin et le nombre de fruits pris par l'oiseau, pourrait-on trouver un résultat ?

Donc on a décidé que la pie volerait les pommes 7 par 7 et le corbeau les poires 6 par 6. Et qu'il devra rester 3 pommes et 5 poires. On a gardé des lots constitués de 1 pomme et 1 poire.

On a trouvé qu'il fallait 17 lots pour qu'il reste 5 poires et 3 pommes après le passage des oiseaux . Pour vérifier cela on a fait le calcul:

$$7 \times 2 + 3 = 17 = 6 \times 2 + 5 = 17 .$$

Handwritten notes on grid paper:

- 3 pommes 5 poires
- le corbeau 6 poires par 6
- pie vol 7 pommes par 7
- 17 lots

Diagram illustrating the distribution of 17 lots (each containing 1 apple and 1 pear) into two groups:

- Group 1 (Pie): 7 lots (7 apples and 7 pears), circled in blue.
- Group 2 (Crow): 6 lots (6 apples and 6 pears), circled in green.

Remaining fruits after distribution:

- 3 apples (circled in blue)
- 5 pears (circled in green)

Et pour finir on a répondu à la troisième question qui était :

Si on change le nombre de fruits pris par les oiseaux, le nombre qu'il doit rester et si nous rajoutions un oiseau supplémentaire qui vole un autre fruit, est-ce que on pourrait trouver un résultat ? On a encore gardé des lots constitués de 1 pomme et 1 poire.

Donc on a décidé de rajouter un perroquet qui volerait des fraises 6 par 6.

La pie volerait les pommes 7 par 7 et le corbeau les poires 5 par 5.

ET qu'il devrait rester 4 poires , 2 pommes et 3 fraises.

Et on a trouvé qu'il fallait 9 lots pour qu'il reste 4 poires, 2 pommes et 3 fraises après le passage des oiseaux . Pour vérifier cela on a fait le calcul:

$$5 \times 1 + 4 = 7 \times 1 + 2 = 6 \times 1 + 3 = 9 .$$

Il doit rester :

- 4 poires
- 2 pommes
- 3 fraises

L'oiseau prend :

- le corbeau 5 par 5 poires
- la pie 7 par 7 pommes
- le perroquet 6 par 6 fraises

9 lots

3) Trouver plus de solutions avec le tableur

Ensuite nous avons créé un tableur pour trouver plus de solutions, en reprenant le problème avec des pommes et des poires uniquement, comme dans l'énoncé de départ.

	A	B	C	D	E
1	Nombres de lots de fruits	Nombres de pommes volées par la pie	Nombres de poires volées par le corbeau	Pommes restantes	Poires restantes
2	1	0	0	1	1
3	2	0	0	2	2
4	3	3	0	0	3
5	4	3	0	1	4
6	5	3	5	2	0
7	6	6	5	0	1
8	7	6	5	1	2
9	8	6	5	2	3
10	9	9	5	0	4
11	10	9	10	1	0
12	11	9	10	2	1
13	12	12	10	0	2
14	13	12	10	1	3
15	14	12	10	2	4
16	15	15	15	0	0
17	16	15	15	1	1
18	17	15	15	2	2
19	18	18	15	0	3
20	19	18	15	1	4
21	20	18	20	2	0
22	21	21	20	0	1
23	22	21	20	1	2
24	23	21	20	2	3
25	24	24	20	0	4
26	25	24	25	1	0
27	26	24	25	2	1
28	27	27	25	0	2
29	28	27	25	1	3
30	29	27	25	2	4
31	30	30	30	0	0
32	31			1	

Nombre de lots
1 lot = 1 pomme et 1 poire

Nombres de
pommes
volées par la
pie

Nombre de
poires volées
par le corbeau

Nombres de
pommes restantes
après le passage
de la pie

Nombres de
poires restantes
après le passage
du corbeau

G	H
Nombres de lots pour lesquels il reste <u>2 pommes</u>	Nombre de lots pour lesquels il reste <u>1 poire</u>
2	1
5	6
8	11
11	16
14	21
17	26
20	31
23	36
26	41
29	46
32	51
35	56
38	61
41	66
44	71
47	76
50	81
53	86
56	91
59	96
62	101
65	106
68	111
71	116
74	121
77	126
80	131
83	136
86	141
89	146
92	151

Ici nous avons les résultats qui fonctionnent, pour les deux fruits. Tous ceux qui sont en jaune sont les résultats qui fonctionnent des deux côtés et qui sont donc bons. Par exemple avec 11 lots on peut faire une confiture, car ça fonctionne des deux cotés. Mais avec 6 lots ça ne fonctionnera que pour les poires et pas pour les pommes.

Donc avec 2 lots il nous reste 2 pommes, donc le bon nombre de pommes qu'il faut qu'il reste après le passage de la pie.

Et avec 1 lot il nous reste 1 poire, donc le bon nombre de poires qu'il faut qu'il reste après le passage du corbeau.

Pour être sûr des résultats, on soustrait le nombre de lots, avec la multiplication du nombre de poires ou de pommes volées par l'oiseau avec le nombre de passages :
→ avec la pie, on fait : $11 - 3 \times 3$, donc $11 - 9 = 2$. C'est le nombre de pommes qu'il faut à la fin, pour la confiture.
→ avec le corbeau, on fait la même chose pour les poires : $11 - 2 \times 5$, donc $11 - 10 = 1$ le nombre de poire qu'il faut à la fin, pour la confiture.

Annexe à la partie 3)Tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombres de lots de fruits	Nombres de pommes volées par la pie	Nombres de poires volées par le corbeau	Pommes restantes	Poires restantes		Nombres de lots pour lesquels il reste 2 pommes	Nombre de lots pour lesquels il reste 1 poire
2	1	0	0	1	1		2	1
3	2	0	0	2	2		5	1
4	3	3	0	0	3		8	11
5	4	3	0	1	4		11	16
6	5	3	5	2	0		14	21
7	6	6	5	0	1		17	26
8	7	6	5	1	2		20	31
9	8	6	5	2	3		23	36
10	9	9	5	0	4		26	41
11	10	9	10	1	0		29	46
12	11	9	10	2	1		32	51
13	12	12	10	0	2		35	56
14	13	12	10	1	3		38	61
15	14	12	10	2	4		41	66
16	15	15	15	0	0		44	71
17	16	15	15	1	1		47	76
18	17	15	15	2	2		50	81
19	18	18	15	0	3		53	86
20	19	18	16	1	4		56	91
21	20	18	20	2	0		59	96
22	21	21	20	0	1		62	101
23	22	21	20	1	2		65	106
24	23	21	20	2	3		68	111
25	24	24	20	0	4		71	116
26	25	24	25	1	0		74	121
27	26	24	25	2	1		77	126
28	27	27	25	0	2		80	131
29	28	27	25	1	3		83	136
30	29	27	25	2	4		86	141
31	30	30	30	0	0		89	146
32	31			1			92	151

4) Modélisation avec un programme Scratch

Nous avons trouvé intéressant de modéliser la question via un un programme scratch, pour faciliter les tests avec des résultats plus grands. Ceci nous a aussi permis de rendre possible les tests avec 3 fruits, voire plus car le programme est extensible à l'infini, moyennant un peu de puissance de calcul. Le programme se découpe en trois grandes parties :

```
quand est cliqué
montrer
supprimer tous les éléments de la liste Paires
supprimer tous les éléments de la liste Pommes
supprimer tous les éléments de la liste Fraises
mettre possibilités 3 à 1
mettre possibilités 2 à 1
mettre possibilités 1 à 1
mettre nombres test à 1
mettre Paires à 0
mettre Pommes à 0
mettre Fraises à 0
mettre ratio Paires à 0
mettre Ratio pommes à 0
mettre ratio fraises à 0
```

D'abord toutes les valeurs doivent être réinitialisées et les paramètres doivent être préparés.

Ensuite le programme demande les valeurs du problème.

P.S. Les valeurs doivent être des nombres entiers positifs, car les oiseaux volent des fruits entiers et il nous faut des fruits complets pour notre confiture.

```
demander Ratio Paires et attendre
mettre ratio Paires à réponse
demander Ratio pommes et attendre
mettre Ratio pommes à réponse
demander Ratio fraises et attendre
mettre ratio fraises à réponse
demander Paires et attendre
mettre Paires à réponse
demander Pommes et attendre
mettre Pommes à réponse
demander Fraises et attendre
mettre Fraises à réponse
```

Taille des lots volés

Ex : si Ratio poires est à 3, les oiseaux volent les poires 3 par 3

Nombre de fruits voulus pour notre confiture à la fin

Ex : si on prend les données de base de l'exercice, 1 poire, le nombre de poire(s) voulue(s) est donc 1.

À partir de ces données, le programme fait une liste, pour chaque fruit, de toutes les possibilités via cette opération :

```

répéter 100 fois
  insérer Poires + ratio Poires * nombres test en position nombres test de Poires
  insérer Pommes + Ratio pommes * nombres test en position nombres test de Pommes
  insérer Fraises + ratio fraises * nombres test en position nombres test de Fraises
  ajouter 1 à nombres test
  
```

Le programme teste d'abord les poires. Par exemple, si j'entre dans le programme comme fréquence de vol des poires 5 et comme nombre de poires voulues 1, la première ligne de la colonne poires sera 6, donc prendre 6 lots de fruits nous donne le bon nombre de poires avec les données entrées. Mais ce ne sera pas la seule valeur possible (par exemple les suivantes sont 11, 16 et 21). On teste alors sur le même principe les données suivantes, 100 fois pour avoir un maximum de résultats. Et on répète l'opération pour chaque fruit.

Un aperçu des listes créées

Ex : Les nombres qui donnent le bon nombre de poires

	Poires	Pommes	Fraises
1	6	4	11
2	11	7	18
3	16	10	25
4	21	13	32
5	26	16	39
6	31	19	46
7	36	22	53
	+ longueur 100 =	+ longueur 100 =	+ longueur 100 =

Les données que l'on souhaite tester

ratio Poires	5	Poires	1
Ratio pommes	3	Pommes	1
ratio fraises	7	Fraises	4

Enfin, le programme va comparer ses listes à l'aide de cette partie du script, afin de trouver les valeurs présentes dans chaque liste :

```
répéter indéfiniment
si possibilités 2 = longueur de Poirés alors
mettre possibilités 2 à 1
ajouter 1 à possibilités 3
sinon
ajouter 1 à possibilités 2
si élément possibilités 3 de Fraises = élément possibilités 2 de Poirés et Pommés contient élément possibilités 3 de Fraises ? alors
dire élément possibilités 2 de Poirés pendant 2 secondes
stop tout
```

En effet, si un nombre est présent dans toutes les listes, il donne le bon nombre de chaque fruit à la fin, c'est donc une solution à notre problème. Il en existe une infinité, nous sélectionnons par principe la plus petite, pour une question de praticité. Le programme vérifie donc le premier nombre de la plus grande liste, et vérifie si il est présent dans les autres. Si il est présent le programme dit le nombre, sinon il teste le nombre suivant de la liste. Il continue ainsi jusqu'à avoir testé la liste entière. Le calcul se fait en quelques secondes au total, ce qui nous a fait gagner beaucoup de temps.

5) Modélisation par une équation

Après avoir modélisé sur scratch, nous sommes revenus au problème initial pour que la modélisation en une équation soit plus simple, nous avons fini par trouver l'équation ci-dessous :

$$5*y+1=3*z+2$$

Ce que représente chaque nombre ou chaque lettre :

- 5 étant le nombre de poire(s) prise(s) par passage par le corbeau
- y étant le nombre de passage(s) du corbeau
- 1 étant le nombre de poire(s) qu'il faut pour la confiture
- 3 étant le nombre de pomme(s) prise(s) par passage par la pie
- z étant le nombre de passage(s) de la pie
- 2 étant le nombre de pomme(s) qu'il faut pour la confiture

Donc **$5*y$ est le nombre total de poires volées** et **$3*z$ le nombre total de pommes volées.**

Quelques remarques :

- pour des questions de réalisme, y et z doivent être des nombres entiers non nuls (voir exemples ci-dessous).
- les valeurs 5, 1, 3, 2 sont des paramètres qu'on peut faire varier. Nous avons étudié le problème avec ces valeurs.

Pour trouver l'équation, on a retranscrit le programme scratch d'un langage informatique vers un langage mathématique.

L'équation ne permet pas de trouver de solution unique, car il y a deux inconnues mais si on définit y un nombre entier non nul on peut trouver un z nombre non nul et inversement, ce qui est possible grâce aux tableurs vus précédemment.

Exemple de solution :

On se demande si avec $y = 2$, on trouve un z entier.

Si $y = 2$ alors $5*y + 1 = 11$ et donc on cherche z tel que $3*z + 2 = 11$. On obtient $z = 3$.

On a donc bien finalement $5*y+1 = 3*z+2 = 11$ avec $y = 2$ et $z = 3$ qui sont entiers.

Exemple d'une solution mathématique qui ne fonctionne pas dans la situation de l'exercice :

On se demande si avec $y = 4$, on trouve un z entier.

Si $y = 4$ alors $5*y + 1 = 21$ et donc on cherche z tel que $3*z + 2 = 21$. On obtient $z = \frac{19}{3}$

On a bien $5*y+1 = 3*z+2 = 21$ (avec $y = 4$ et $z = \frac{19}{3}$) mais z n'est pas entier : la pie ne peut pas passer $\frac{19}{3}$ fois.

6) Conclusion

Pour conclure plusieurs pistes s'offrent à nous pour poursuivre ce problème. Par exemple, dans le tableur, beaucoup des valeurs qui apparaissent sont des nombres premiers. Nous nous demandons donc s'il y a un lien entre ce problème et les nombres premiers.

Nous avons fait le point sur ce que nous avons fait varier ou non :

- Nous avons fait varier le nombre de fruits volés
- Nous avons fait varier le nombre de fruits dans la confiture
- Mais nous n'avons pas fait varier le nombre de fruits dans les lots.

Si nous le faisons, on aurait alors fait varier tous les paramètres possibles du problème.

On a travaillé avec le ratio nombre de poires: nombre de pommes = 1:1. On aurait pu par exemple imaginer d'autres lots de 3 poires et 4 pommes (ce qui aurait fait un ratio 3 : 4). Cela aurait changé beaucoup de choses, ce que nous n'avons pas pris le temps d'explorer.